2) a/ $t\in[0,1]$; $0\le t^2\le 1$

$\Leftrightarrow 1\le t^2+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}\le\frac{1}{t^2+1}\le 1$

$\Leftrightarrow 0\le\frac{t^{2n}}{1+t^2}\le t^{2n}; t\ge 0$

Intégrant les trois membres de l'inégalité précédente sur $[0,1]$ on aura :

$$0\le\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n}dt$$

Or $\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$ (d'après 1-b/)

D'où : $0\le I_n\le\frac{1}{2n+1};\forall n\in\mathbb{N}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 15

$a>0; n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt$

Avec $n!=n(n-1)\times.....\times 3\times 2\times 1$

1) $I_1(a)=\int_0^a te^{-t}dt$

Intégrant par parties et posons:

$U(t)=t\to U'(t)=1$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

D'où : $I_1(a)=\left[-te^{-t}\right]_0^a-\int_0^a -e^{-t}dt$

$=-ae^{-a}-\left[e^{-t}\right]_0^a=-ae^{-a}-e^{-a}+1$

$$\boxed{I_1(a)=-(1+a)e^{-a}+1}$$

2) a) $n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0$, pour $t\ge 0$ on a: $-t\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le e^{-t}\le e^0=1$ et $t^n\ge 0$

$\Leftrightarrow 0\le t^ne^{-t}\le t^n\Leftrightarrow 0\le\frac{t^ne^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$

b) on a: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0\quad 0\le\frac{t^ne^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$

Intégrant les trois membres de cette inégalité

on aura : $0\le\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt\le\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt$

Or: $\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt=\frac{1}{n!}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$=\frac{1}{n!}\times\frac{a^{n+1}}{(n+1)}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\boxed{0\le I_n(a)\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}dt$

Posons:

$U(t)=t^n\to U'(t)=nt^{n-1}$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

$I_n(a)=\frac{1}{n!}\int_0^a t^ne^{-t}dt$

$=\frac{1}{n!}\left[\left[-t^ne^{-t}\right]_0^a-\int_0^a nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)dt\right]$

$=\frac{1}{n!}\left(-a^ne^{-a}\right)+\frac{n}{n!}\int_0^a t^{n-1}e^{-t}dt$

Or: $\frac{n}{n!}=\frac{n}{n(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

Donc $I_n(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}+\underbrace{\int_0^a\frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt}_{I_{n-1}(a)}$

Il résulte que: $\forall n\in\mathbb{N}^*: I_n(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}+I_{n-1}(a)$

D'où : $I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^ne^{-a}}{n!}$

b) on a: $-\frac{a^ne^{-a}}{n!}\le 0$ car $a>0$

Donc $I_n(a)\le I_{n-1}(a)$ et par suite $(I_n(a))$ est une suite décroissante et $I_n(a)\ge 0$ d'où $I_n(a)$ est convergente.

c) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$I_n(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)$

i) Pour $n=1$: $I_1(a)=1-(1+a)e^{-a}$

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn